18|5|18 ~~[illegible]~~

Συνέχεια απόδειξης...

② ⇒ ③ Θέτουμε: $B = C$. Τότε επειδή ${}^tB = B$, θα έχουμε: $A = B^2 = B \cdot B = {}^tB \cdot B = {}^tC \cdot C$

③ ⇒ ① Αν $A = {}^tC \cdot C$, για κάποιον $C \in M_n(\mathbb{R})$ τότε: ${}^tA = {}^t({}^tC \cdot C) = {}^tC \cdot {}^t({}^tC) = {}^tC \cdot C = A \Rightarrow {}^tA = A$

$\forall X \in \mathbb{R}^n$: $\langle AX, X \rangle = \langle ({}^tCC)X, X \rangle =$
$= \langle {}^tC(CX), X \rangle =$
$= \langle CX, {}^t({}^tC)X \rangle =$
$= \langle CX, C \cdot X \rangle = \|C \cdot X\|^2 \geq 0$

(*) $\langle A \cdot X, Y \rangle = \langle X, {}^tA \cdot Y \rangle$

Άρα: $A \geq 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $A \geq 0$, τότε ένας πίνακας B καλείται τετραγωνική ρίζα του A, και τότε γράφουμε: $B = \sqrt{A} \Leftrightarrow {}^tB = B$ και $B^2 = A$
Γενικότερα ένας πίνακας B καλείται μια n-οστή ρίζα του $A \Leftrightarrow {}^tB = B$ και $B^n = A$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί μια τετραγωνική ρίζα του $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ -1 & 0 & 3-t \end{vmatrix} \overset{\text{ΠΡΑΞΕΙΣ}}{= \dots =} -(t-2)^2 \cdot (t-4)$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ιδιοτιμές του A είναι: $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_2 = 4 \text{ (απλή)} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A > 0$ (επειδή οι ιδιοτιμές είναι > 0)

• $V(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \,/\, x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$: βάση του $V(2) \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$: ΟΚΒ του $V(2)$

• $V(4) = \left\{ \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \,/\, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \,/\, x \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: βάση του $V(4) \Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$: ΟΚΒ του $V(4)$

Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow P$: ορθογώνιος και

${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Θέτοντας $B = P \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP$

έχουμε ${}^tB = B$ και $B^2 = A \Rightarrow B = \sqrt{A}$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 + 1 & 0 & \sqrt{2}/2 - 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2}/2 - 1 & 0 & \sqrt{2}/2 + 1 \end{pmatrix}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ SYLVESTER: Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας. Τότε $A > 0 \Leftrightarrow \Delta_k > 0 \; \forall k=1,\dots,n$, όπου $\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\dots$, $\Delta_n = |A|$ είναι οι κύριες ελάσσονες ορίζουσες του A όπου:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Για τον A: $\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

$\Delta_3 = |A| = 4 > 0$

Άρα από το κριτήριο του Sylvester $\Rightarrow A > 0$

Για τον B: $\Delta_1 = 2 > 0$

$\Delta_2 = 3 > 0$

$\Delta_3 = |B| = 0$

Άρα ο B δεν είναι θετικός

ΑΣΚΗΣΗ: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Να βρεθεί, αν υπάρχει μια τετραγωνική ρίζα του A.

$P_A(t) = |A - tI_3| = \dots = -t(t-1)\cdot(t-3) \Rightarrow$ Ιδιοτιμές του A: $\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$ Άρα $A \geq 0$

$\longrightarrow$

ΟΚΒ του

- $V(0)$: $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

- ΟΚΒ του $V(1)$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

- ΟΚΒ του $V(3)$: $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Τότε: $P = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$

Τότε: ${}^tP \cdot A P = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

$B = P \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3}\end{pmatrix} \cdot {}^tP$

: τετραγωνική ρίζα του A

ΑΣΚΗΣΗ: Να βρεθεί, αν υπάρχει, μία κυβική ρίζα του $A = \begin{pmatrix}9/2 & 0 & -7/2\\ 0 & -1 & 0\\ -7/2 & 0 & 9/2\end{pmatrix}$

$P_A(t) = |A - tI_3| = -(t+1)\cdot(t-1)\cdot(t-8)$

Ιδιοτιμές του A: $\begin{cases}\lambda_1 = 1\\ \lambda_2 = -1\\ \lambda_3 = 8\end{cases}$ Επειδή $A \not\geq 0$ και $A \not> 0$ $\Rightarrow$ Ο A δεν έχει τετραγωνική ρίζα

- $V(1) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid k \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix} \right\}$: ΟΚΒ του $V(1)$

- $V(-1) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$: ΟΚΒ του $V(-1)$

- $V(8) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid k \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}-\sqrt{2}/2\\0\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix} \right\}$: ΟΚΒ του $V(8)$ $\Rightarrow$

Θέτοντας $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ αποκτούμε έναν ορθογώνιο πίνακα έτσι

ώστε: ${}^tP \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

Θέτουμε: $B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^tP = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$

Τότε $B = {}^tB$ και $B^3 = A \Rightarrow B$: κυβική ρίζα του A

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle , \rangle)$. Τότε:
$f^* = -f \Leftrightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0, \forall \vec{x} \in E$

ΛΥΣΗ: $\boxed{\forall \vec{x}, \vec{y} \in E: \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f^*(\vec{y}) \rangle}$ (*)

"$\Rightarrow$" Έστω $f^* = -f$. Τότε: $\forall \vec{x} \in E: \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, -f^*(\vec{x}) \rangle \Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = -\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι, $\forall \vec{x} \in E: \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = 0$. Θα δείξουμε ότι $f^* = -f$, δηλαδή $\forall \vec{z} \in E: f^*(\vec{z}) = -f(\vec{z})$

Τότε; $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E: \langle f(\vec{x}+\vec{y}), \vec{x}+\vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \vec{x}+\vec{y} \rangle = 0 \Rightarrow \cancel{\langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle}^{0} + \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle +$
$+ \langle f(\vec{y}), \vec{x} \rangle + \cancel{\langle f(\vec{y}), \vec{y} \rangle}^{0} = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle + \langle f(\vec{y}), \vec{x} \rangle = 0$ (1)

$\longrightarrow$

Όμως: $\langle f(\vec{y}), \vec{x}\rangle = \langle \vec{y}, f(\vec{x})\rangle = \langle f^*(\vec{x}), \vec{y}\rangle$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \langle f(\vec{x}), \vec{y}\rangle + \langle f^*(\vec{x}), \vec{y}\rangle = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle f(\vec{x}) + f^*(\vec{x}), \vec{y}\rangle = 0$

$\forall \vec{y} \in E \Rightarrow f(\vec{x}) + f^*(\vec{x}) = 0, \ \forall \vec{x} \in E \Rightarrow$
$\Rightarrow f^*(\vec{x}) = -f(\vec{x}), \ \forall \vec{x} \in E \Rightarrow f^* = -f$

Αν $f^* = -f$, και B = ΟΚΒ του E, τότε:
αν $A = M_B^B(f)$, τότε: ${}^tA = M_B^B(f^*) =$
$= M_B^B(-f) = -M_B^B(f) = -A \Rightarrow {}^tA = -A$, έτσι:
$f^* = -f \Leftrightarrow \forall B$: ΟΚΒ του E: $\underbrace{M_B^B(f)}_{= A}$: αντισυμμετρικός.

$\Leftrightarrow \langle A \cdot X, X\rangle = 0$

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Έστω $(E, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπ/νης διάστασης και έστω: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$: ΟΚΒ του E.
Τότε, $\forall \vec{x} \in E$: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$, Θέτουμε:
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$: διάνυσμα στήλη των συνιστωσών του $\vec{x}$ στη βάση B.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια απεικόνιση $q: E \to \mathbb{R}$, καλείται τετραγωνική μορφή $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E: q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$,

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \le i, j \le n$ και $a_{ij} = a_{ji}$
Θέτοντας $A = (a_{ij})$ προκύπτει ένας συμμετρικός $\to$

πίνακας, ο οποίος καλείται ο πίνακας της q ως προς ΟΚΒ B.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ① $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy =$
$= 2x^2 + 4y^2 + xy + y \cdot x$

Τότε: q: τετραγωνική μορφή στο $\mathbb{R}^2$ και ο πίνακας της q είναι ο $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

② $q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$q(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + xy + 2yz + 3xz =$
$= 2x^2 + 3y^2 + z^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}yx + yz + zy + \frac{3}{2}xz + \frac{3}{2}zx$

$\to$ Είναι τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^3$ της οποίας ο πίνακας είναι: $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 3 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $q: E \to \mathbb{R}$ είναι μια τετραγωνική μορφή, τότε: $\forall \vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$: $q(\vec{x}) = {}^tX \cdot A \cdot X =$
$= \langle AX, X \rangle = \langle X, AX \rangle$

Πράγματι: $q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

$${}^tX \cdot A \cdot X = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{n1}x_n \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$\to$

Παρόμοια: $q(\vec{x}) = \langle AX, X \rangle$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $q: E \to \mathbb{R}$ είναι μια τετραγωνική μορφή, τότε: $q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j =$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Μια <u>υπερεπιφάνεια</u> στον $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο σημείων $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία:

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}_{} + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0$$

, όπου $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

<u>$n=2$</u>: $\underbrace{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{12}x_1 \cdot x_2 + a_{21}x_2 x_1 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0}_{}$
γενική εξίσωση δευτεροβάθμιας καμπύλης

Έστω $q: E \to \mathbb{R}$ μια τετραγωνική μορφή στον E, με πίνακα $A = (a_{ij})$, σε μια ΟΚΒ $B = \{\vec{e_1}, \ldots \vec{e_n}\}$

Επειδή $A = {}^tA \xrightarrow[\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}]{\text{ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ}} \exists$ ορθογώνιος πίνακας

$$P: {}^tP \cdot A \cdot P = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

, όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A.

Τότε: $\boxed{A = P \cdot \Delta \, {}^tP}$ (*)

Αν $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n}$ και $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, τότε:

$$q(\vec{x}) = {}^tX \cdot A \cdot X \overset{(*)}{=} {}^tX \cdot P \cdot \Delta \cdot {}^tP \cdot X = {}^t({}^tP \cdot X) \cdot \Delta \cdot {}^tP \cdot X =$$

$\to$

θέτοντας $\{\vec{e_i}\} = C$ είναι η βάση του E της
οποίας ο πίνακας μετάβασης από την B
στη C είναι ο P, και η οποία είναι
ορθοκανονική. Τότε: αν $\vec{x} = x_1' \cdot \vec{e_1}' + \dots + x_n' \vec{e_n}'$, θα
έχουμε: $x' = {}^tPx$ και ο πίνακας της q στην
C είναι ο $\Delta \Rightarrow q(\vec{x}) = \lambda_1 \vec{x_1}'^2 + \dots + \lambda_n \vec{x_n}'^2$